Colegiul Național „Liviu Rebreanu” Bistrița

Str. B-dul Republicii nr. 8 cod poștal 420057

Tel./Fax: 0263-231.112

Web: www.cnlr.ro, e-mail: rebreanu@cnlr.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„MATEMATICA, DE DRAG”

Ediţia a XIII-a, 17 noiembrie 2018

Clasa a IX-a

Subiectul 1

1. Arătaţi că pentru $n \geq 1900$ şi orice $k \in \mathbb{N}$ avem

$$\sqrt{n+k+\sqrt{n+k-1+\ \dots+\sqrt{n}}} < 1+\sqrt{n+k-40}$$

2. Calculaţi partea întreagă a numărului

$$CENTENAR = \sqrt{2018+\sqrt{2017+\ \dots+\sqrt{1918}}}$$

Subiectul 2

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi fie $AD \cap BC = \{S\}$. Pe latura AB a triunghiului SAB se notează cu E şi F piciorul medianei, respectiv piciorul simedianei din S. Dacă $SF \cap DC = \{K\}$, arătaţi că $\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Simediana din vârful A este dreapta ce trece prin A şi este simetrica medianei în raport cu bisectoarea unghiului A.

Gazeta Matematică

Subiectul 3

1. Arătaţi că pentru orice numere pozitive a, b, c avem
$$a^{10}+b^{10}+c^{10} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^9+b^9+c^9).$$
2. Ştiind că numerele reale x, y, z verifică egalităţile
$$x^4+y^4+z^4 = x^{40}+y^{40}+z^{40} = 3,$$
Determinaţi mulţimea $M = \{x^n+y^n+z^n \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$

Colegiul Național „Liviu Rebreanu” Bistrița
Str. B-dul Republicii nr. 8 cod poștal 420057
Tel./Fax: 0263-231.112
Web: www.cnlr.ro, e-mail: rebreanu@cnlr.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MATEMATICA, DE DRAG”
Ediţia a XIII-a, 17 noiembrie 2018

Clasa a X-a

Subiectul 1

Fie $A=\{(n,x)|\ n\in\mathbb{N}, x\in\{0,1\}\}$ şi $f\colon A\longrightarrow\mathbb{Q}$ definită prin

$$f(n,x)=\frac{2^n+x}{2^x+n}.$$

Arătaţi că f este injectivă.

Subiectul 2

Determinaţi numerele complexe a şi b dacă $Re(az^2+bz)\leq Im(az^2+bz)$ oricare ar fi $z\in\mathbb{C}$

Gazeta Matematică

Subiectul 3

Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Să se determine imaginea funcţiei

$$f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x)=\{x\}+\{2x\}+\ \dots+\{nx\}.$$

Cu $\{x\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real x.

Colegiul Național „Liviu Rebreanu” Bistrița

Str. B-dul Republicii nr. 8 cod poștal 420057

Tel./Fax: 0263-231.112

Web: www.cnlr.ro, e-mail: rebreanu@cnlr.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„MATEMATICA, DE DRAG”

Ediţia a XIII-a, 17 noiembrie 2018

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin $a_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n^2 - 1 + \sqrt{n^2 - 2 + \ldots + \sqrt{n}}}}$, pentru orice $n \geq 1$. Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$

Subiectul 2

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ şi transpoziţia (i, j). Să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_n$, astfel încât $\sigma \cdot (i, j) = (i, j) \cdot \sigma$.

Gazeta Matematică

Subiectul 3

a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^{2018} = O_2$. Demonstraţi că $A^2 = O_2$.

b) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^{2018} = I_2$. Demonstraţi că $A^2 = I_2$.

Colegiul Național „Liviu Rebreanu” Bistrița

Str. B-dul Republicii nr. 8 cod poștal 420057

Tel./Fax: 0263-231.112

Web: www.cnlr.ro, e-mail: rebreanu@cnlr.ro

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

„MATEMATICA, DE DRAG”

Ediţia a XIII-a, 17 noiembrie 2018

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie $(M,\cdot)$ o mulţime nevidă înzestrată cu o operaţie asociativă astfel încât există $m,n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$, cu $x^m \cdot y^n = y \cdot x$, oricare ar fi $x, y \in M$. Să se arate că:

a) $x^{m\cdot n} = x^m$, pentru orice $x \in M$

b) Dacă în plus $x^m \cdot y^n = (y \cdot x)^m$, oricare ar fi $x, y \in M$, atunci legea "$\cdot$" este comutativă.

Gazeta Matematică

Subiectul 2

Fie $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu $f(0) = 0$ şi $0 < f'(x) \leq 1$ pentru $x \in [0,1]$. Considerăm primitivele F şi G ale funcţiilor f respectiv f^3 cu $F(0) = G(0) = 0$.

a) Arătaţi că $F^2(x) \geq G(x)$ pentru orice $x \in [0,1]$.

b) Determinaţi f dacă $F^2(1) = G(1)$

Subiectul 3

Determinaţi funcţiile $f: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

(i) f este crescătoare

(ii) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F(0) = 0$ şi

$F(x + y) \leq F(x) + F(y),\ \forall x, y \in [0, \infty)$